TRABAJO DE CÁLCULO III
Programa de Lic. en Matemáticas.
Prof. Juan Deavila

Nota: Estos son **algunos** ejercicios para el trabajo del segudo corte. Se debe presentar el día () de (). Se debe trabajar en grupos de **mínimo 5 estudiantes**. Recuerde que la calificación de este trabajo representa el 30 % de la nota final para el segundo corte.

1. Halle todos los puntos críticos (si poseen) de las siguientes funciones definidas por:

   a) $f(x, y) = \ln(1 + \operatorname{sen}(xy))$
   b) $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 10$
   c) $f(x, y) = e^{x^2+2y^2}$

2. En los siguientes ejercicios hallar los puntos críticos y determinar cúales son máximos locales, mínimos locales o puntos silla de las funciones definidas por:

   a) $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$
   b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$
   c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$
   d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$
   e) $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$
   f) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$
   g) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$
   h) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
   i) $f(x, y) = y + x \operatorname{sen} y$
   j) $f(x, y) = e^x \cos y$
   k) $f(x, y) = (x - y)(xy - 1)$
   l) $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$
   m) $f(x, y) = \ln(2 + \operatorname{sen}(xy))$
   n) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$
   ñ) $f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$

3. Si $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre U y f tiene un único punto crítico en U que corresponde a un valor máximo relativo, entonces necesariamente también corresponde a un valor máximo absoluto. Esto no es verdad para funciones de mas de una variable independiente. Verificar lo anterior usando la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}.$$

4. Si $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre U, entonces es imposible para f tener dos valores máximos relativo (distintos) en U y no un valor mínimo relativo. Para funciones de mas de una variable independiente si es posible. Verificar lo anterior usando la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2.$$

5. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función f definida por $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ en el rectángulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

6. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función f definida por $f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$ en la región triangular cuyos vértices son los puntos $(1, 0)$, $(5, 0)$ y $(1, 4)$.

7. Sean $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$. Determine los valores máximo y mínimo absolutos de f en D.

8. Hallar los valores extremos absolutos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y).$$

9. Escribir el número 120 como una suma de tres números, de modo que la suma de los productos tomados de dos en dos, sea máxima.

10. Mostrar que el paralelepípedo rectangular con área de suprficie fija y volumen máximo es un cubo.

11. En los siguientes ejercicios hallar los valores extremos de f sujetos a las restricciones enunciadas:

    a) $f(x, y) = x - y,\ \ x^2 - y^2 = 2.$
    b) $f(x, y) = x,\ \ x^2 + 2y^2 = 3.$
    c) $f(x, y, z) = x - y + z,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 3.$
    d) $f(x, y, z) = x + y + z,\ \ x^2 - y^2 = 1,\ \ 2x + z = 1.$

12. Hallar los extremos relativos de $f|_S$ en los siguientes ejercicios:

    a) $f(x, y) = x^2 + y^2,\ \ S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}.$
    b) $f(x, y) = x^2 + y^2,\ \ S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2\}.$
    c) $f(x, y) = x^2 - y^2,\ \ S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \cos x\}.$
    d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,\ \ S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 1 + x^2 + y^2\}.$
    e) $\boxtimes$ $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w,\ \ S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid w \geq 1 + x^2 + y^2 + z^2\}.$

13. Usar el método de mutiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el disco unitario.

14. Hallar los puntos críticos de $f(x, y) = x + y^2$ sujeta a la restricción $2x^2 + y^2 = 1$. Usar el hessiano limitado para clasificar los puntos.

15. La producción total P de un determinado producto depende de la cantidad L de mano de obra utilizada y la cantidad K de inversión de capital. Se a discutido cómo el modelo Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ se sigue de ciertos supuestos económicos, donde b y α y son constantes positivas y $\alpha < 1$. Si el costo de una unidad de trabajo es m y el costo de una unidad de capital es n, y la compañía solo puede gastar p dólares como su presupuesto total, entonces maximizar la producción P está sujeto a la restricción $mL + nK = p$. Demuestre que la producción máxima ocurre cuando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \ \text{ y } \ K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}.$$

16. Hallar el valor máximo de $f(x_1, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ dado que $x_1, ..., x_n$ son números psitivos y $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, donde c es una constante. Concluya que si $x_1, ..., x_n$ son números psitivos, entonces

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$